IFTS N°26

PROBABILIDADES

CURSO VIRTUAL AVANZADO

Ing. Rogelio Hernan Bello

En las clases anteriores vimos ejemplos simples sobre probabilidades presentes de variables discretas y aleatorias.

Estos casos se resuelven con la Regla de Laplace en un solo paso, contabilizando elementos totales (E.M.) y elementos que cumplen con la Condición impuesta (Casos favorables).

Sin embargo existen mas de un tipo de variable y mas de un tipo de evento….

A - TIPOS DE VARIABLES

1) DISCRETAS:

Son las que vimos hasta ahora, solo pueden tomar valores puntuales y únicos, asociados a Números generalmente Naturales (enteros positivos).

Ejemplos: MONEDA, DADOS, CARTAS, BOLILLAS, ETC.

2) CONTINUAS:

Pueden adoptar cualquier valor. Son las variables que realmente existen en la naturaleza.

Ejemplos: DISTANCIAS, SUPERFICIES, VOLUMEN, PESO, ETC.

Ejemplo: Calcule la probabilidad de que a un auto que tiene una cantidad incierta de combustible y va a realizar el trayecto CABA - Mar del Plata, se quede sin nafta entre Lezama y Dolores.

Si debe recorrer ese trayecto y yo no sé qué cantidad de nafta es "equiprobable" que se le acabe en cualquier punto del trayecto, pero cuando las variables son continuas yo no puedo calcular un punto en particular (tal como sucedía con el dado o las cartas) sino que debo calcular "intervalos" de la variable, y esos intervalos son los Casos de Laplace.

$$\mathrm{P}(L-D)=\frac{\#Casos\ favorables}{\#Casos\ posibles}=\frac{Dist.Lez./Dol.}{Dist.CABA/MDP}=\frac{55\ kms}{400\ kms}=13{,}75\%$$

B - TIPOS DE EVENTOS

1) ALEATORIOS:

Son los que vimos hasta ahora, y están asociados a variables cuya probabilidad de ocurrencia es la misma para todos los valores que puede adoptar (la variable).

Ejemplos: MONEDA, DADOS, CARTAS, BOLILLAS, ETC.

(siempre que no estén "cargados")

2) NO ALEATORIOS:

Son los eventos cuyos resultados no son solo producto del azar o de la "aleatoriedad", sino que estan asociados a una Función de Distribución Estadística.

Ejemplos: TIRO AL BLANCO, DADO CARGADO, BOLA CALIENTE, ETC.

Ejemplo: si yo TIRO AL BLANCO apuntaré al centro, por ende el disparo no es "equiprobable" de pegar en cualquier sector, sino que dependerá de mi destreza su mayor o menor probabilidad de dar en cada sector del blanco.

C - TIPOS DE ENSAYOS

1) CON REPOSICIÓN:

Están asociados a variables que conservan la misma probabilidad de ocurrencia asociada luego de realizar N ensayos.

Ejemplos: MONEDA, DADOS, RULETA.

No importa cuantas veces tire una moneda, siempre la probabilidad del próximo tiro será del 50%. Lo mismo sucede con un dado (1/6).

2) SIN REPOSICIÓN:

Están asociados a variables cuyas probabilidades cambian a medida que suceden los eventos.

Ejemplos: CARTAS, BOLILLAS, ETC.

Al retirar la 1° carta mi E.M.=50, al retirar la 2° mi E.M.=49, al retirar la 3° mi E.M.=48 y así sucesivamente…. (al cambiar el E.M. cambian las prob.).

NOTA: Podría suceder que yo retire una carta (E.M.=50) y la vuelva a colocar en el mazo, por ende al retirar la 2° nuevamente E.M.=50, pero esto debe estar aclarado en el enunciado como "Con Reposición".

En el curso nosotros vamos a ver Variables Discretas, Eventos de ambos tipos y Ensayos CON y SIN reposición, pero igualmente daremos algunos ejercicios con Variables Continuas porque generalmente son las mas importantes.

EVENTOS PASADOS

Es lógico pensar que un evento que ya pasó no puede estar sujeto a Probabilidades, porque ya sabemos qué pasó. Sin embargo, pensemos en un mazo de cartas: la probabilidad de sacar un 10 inicialmente es 4/50. Eso si el mazo tiene todas las cartas, pero si ya saqué 1 antes esto no es así….

El tema se complica, porque aquí se divide la probabilidad:

- *Si la primera fue un 10, la probabilidad de sacar un 10 en la 2° extracción ahora es 3/49,*
- *En cambio, si la primera no fue un 10, la probabilidad de sacar un 10 en la 2° extracción es 4/49.*

TEOREMA DE BAYES

El Teorema de Bayes me indica cómo calcular las probabilidades teniendo información sobre eventos que ya sucedieron.

A: es lo que yo quiero calcular (la incógnita del problema)

B: es lo que yo sé (lo que ya sucedió)

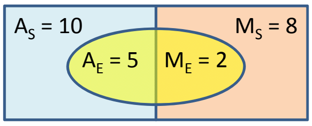
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad de que ocurran ambos A y B (A intersección B)

Probabilidad de que ocurra el evento B

Ejemplo: en una aula hay 15 alumnos varones de los cuales 5 están enfermos, y 10 alumnas mujeres de las cuales 2 están enfermas. Se sabe que un estudiante esta enfermo, calcule la probabilidad de que sea varón.

A: varón
B: mujer
S: sano
E: enfermo



$$P(A/E) = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{5}{7}$$

E.M.=25

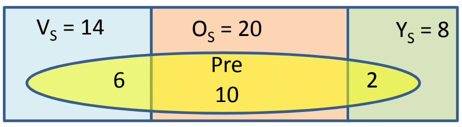
Ejemplo2: se tiró un dado no cargado 5 veces y las 5 veces salió "6", calcule la probabilidad de que el próximo tiro salga 6.

En este caso no hay que aplicar Bayes, si el dado no esta cargado entonces cada uno de sus lados es siempre equiprobable. La respuesta es directa: 1/6.

Ejemplo3: en un campo hay 20 vacas de los cuales 6 están preñadas, 30 ovejas de las cuales 10 están preñadas y 10 yeguas de las cuales 2 están preñadas. Se sabe que hubo un parto, cual es la probabilidad de que haya sido de una vaca?

De la misma forma que en el 1° ejemplo, conviene armar gráficamente a la población para poder contabilizar los casos:

V: vaca
O: oveja
Y: yegua



E.M. = 60

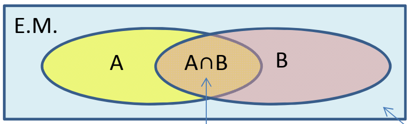
Prob. de tomar una vaca preñada al azar.

Prob. de tomar un animal cualquiera y este preñado.

$$P(V/Preñada) = \frac{P(V \cap Preñada)}{P(Preñada)} = \frac{\frac{6}{60}}{\frac{18}{60}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

CONJUNTOS

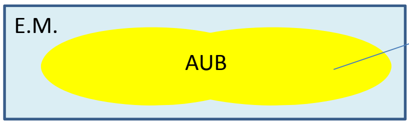
Es por esto mismo que necesitamos estudiar conjuntos. Repasemos:



E.M.: todos los elementos del espacio, todos los valores que puede adoptar la variable.

A∩B: todos los elementos que pertenecen al conjunto A y también pertenecen al conjunto B (elementos en común a ambos)

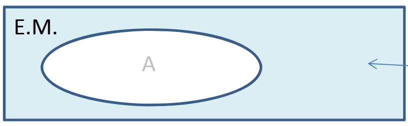
Elementos que no pertenecen ni al conjunto A ni al conjunto B (están afuera de ambos conjuntos)



AUB (A unión B): elementos de A o de B, o de ambos (todos)

AUB = A + B - A∩B

P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)



$\overline{A} = E.M. - A \; (complemento\ de\ A)$

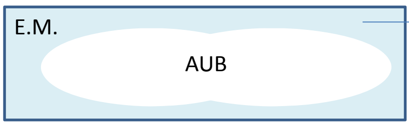
Elementos que no pertenecen a A

Los elementos que no pertenecen a A (complemento de A) son todos los elementos que le faltan a A para completar el espacio muestral.

$A + \overline{A} = E.M.$ → *Los elementos de A mas los elementos que no pertenecen a A son todo el E.M.*

$\overline{P(A)} + P(A) = P(E) = 1$ → *La P(E.M.)=1 (la probabilidad de sacar cualquier elementos del E.M. es 100%)*

$P(A) = 1 - \overline{P(A)}$ → *La P(A) se puede calcular por su complemento (esto es muy útil) en algunos ejercicios.*



$\overline{AUB}$ elementos que no pertenecen ni a A ni a B:

-> $\overline{AUB}$ = E.M. - AUB

-> P($\overline{AUB}$) = 1 - P(AUB)

EVENTOS FUTUROS

"Lo único que sabemos del futuro es que será diferente." (a lo que hayamos planificado). Peter Drucker

Qué sucede con los eventos probabilisticos que ocurrirán mas allá del presente inmediato (futuro mas próximo)?

Por supuesto que no sabemos qué sucederá en el futuro, pero si sabemos las probabilidades asociadas a cada suceso podemos construir un futuro con cierto % de ocurrencia en cada caso que nos interesa analizar.

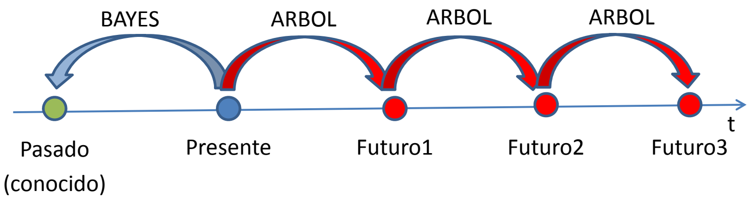


DIAGRAMA DE ARBOL

Es un esquema que nos ayuda a ordenar los eventos. Si bien es el mas recomendable para eventos en el futuro también funciona para otros casos y tiene otros usos, y de aquí su gran importancia.

¿Cómo se arma?

Ejemplo: calcule la probabilidad de tirar 2 monedas y ambas salgan cara.

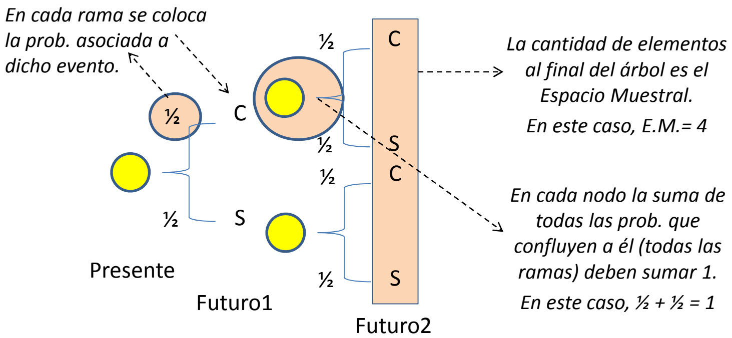
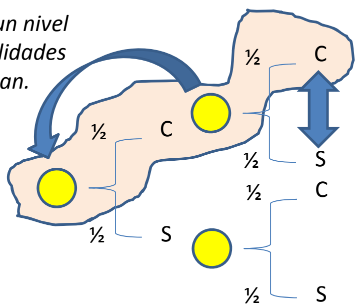


DIAGRAMA DE ARBOL

¿Cómo se calcula?

1) Al subir un nivel las probabilidades se multiplican.



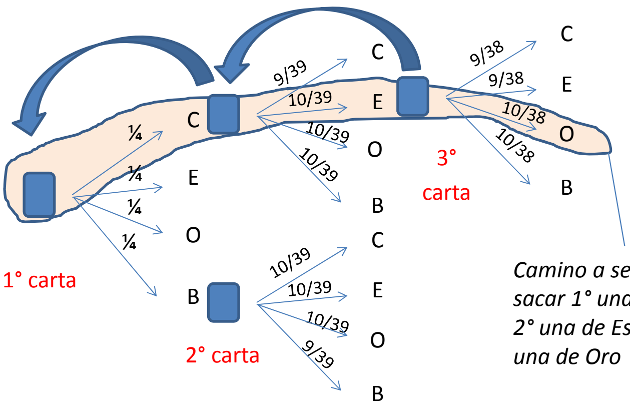
2) Al encontrarse 2 o mas ramas en el mismo nivel las probabilidades se suman.

En este caso: ½ + ½ =1

RTA: P(C;C) = ½ x ½ = ¼ (VER GRÁFICAMENTE)

METODO: elijo el camino que lleva a lo planteado (en este caso, que salga Cara y Cara. Luego, multiplico o divido según las 2 reglas antes vistas.

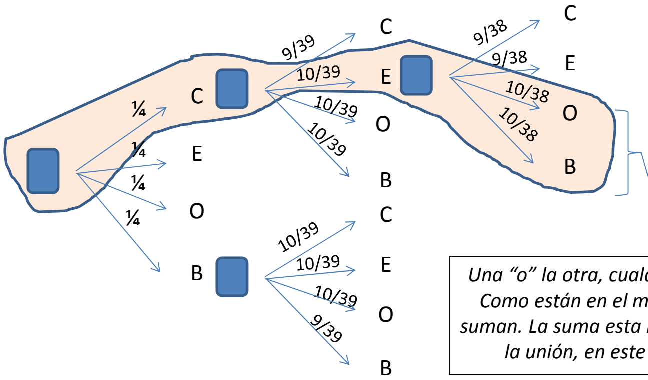
Ejemplo2: calcule la probabilidad de sacar una carta de copa, luego una de espada y por último una de oro de un mazo de 40 cartas (sin reposición).
(sabrán entender por qué dibujo solo 2 cartas en la 2° extracción y solo 1 en la 3°….)



Camino a seguir para sacar 1° una de Copa, 2° una de Espada y 3° una de Oro

RTA: $P(C;E;O) = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{39} \cdot \frac{10}{38} = \frac{25}{1482} = 16{,}87\%$

<u>Ejemplo3:</u> en el mismo caso anterior, calcule la probabilidad de sacar una carta de copa, luego una de espada y por último una de oro o de basto.



Una "o" la otra, cualquiera de las 2. Como están en el mismo nivel, se suman. La suma esta relacionada con la unión, en este caso OUB.

<u>RTA:</u>

$$P(C;E;OUB)=\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{39}\cdot\left(\frac{10}{38}+\frac{10}{38}\right)=\frac{25}{741}=33{,}74\%$$